



A la rencontre de Georges Cantor, un mathématicien de génie

Document réalisé par Francis Loret
professeur agrégé de mathématiques

Irem, groupe vulgarisation



APPROCHER L'INFINI PAR LES ENSEMBLES DE NOMBRES



CITATIONS D'INTRODUCTION

« Les mathématiques sont la science de l'infini. »

H. Weyl

« Le silence éternel de ces espaces infinis m'effraie… »

Pascal

« On dirait que l'infini prend plaisir à nous bercer nous-mêmes dans cette immensité du doute. »

G. Flaubert

« L'art est un pas de la nature vers l'Infini. »

K. Gibran

« Si tu veux progresser vers l'infini, explore le fini dans tous les sens. »

Goethe



« Imaginer deux glaces ayant les mêmes formes et les mêmes dimensions posées l'une en face de l'autre : l'infini est le reflet qu'elles se renvoient ».

F. Picabia

« Un horizon n'est rien d'autre que la limite d'un regard. »

R. Raymond

« […] Car enfin, qu'est-ce que l'homme dans la nature ? Un néant à l'égard de l'infini, un tout à l'égard du néant, un milieu entre rien et tout. Infiniment éloigné de comprendre les extrêmes, la fin des choses et leur principe sont pour lui invinciblement cachés dans un secret impénétrable, également incapable de voir le néant d'où il est tiré, et l'infini où il est englouti. »

Pascal

« Voir un monde dans un Grain de Sable, et un Ciel dans une fleur sauvage, tenir l'infini dans la paume de Sa main et l'éternité dans une heure ».

W. Blake

On peut approcher la notion d'*infini* par différents chemins, par le biais de différentes disciplines (poésie, musique, physique…) : voici l'une des voies, proposée par le mathématicien Georges Cantor…

LES ENSEMBLES DE NOMBRES

Au collège, on a découvert progressivement les ensembles de nombres. Dans l'ordre :

Les nombres entier naturels, comme : 8 = …………………... …

Les nombres entiers relatifs, comme : -7 = …………………... …

Les nombres décimaux, comme : 4,71 = …………………... …

Les nombres rationnels, comme : 15/7 = …………………... …

Les nombres réels, comme : π = …………………... …

Les nombres entiers naturels sont en nombres infinis. En rajoutant les relatifs, on a l'impression de doubler notre réservoir de nombres.

Mais « doubler l'infini », est-ce que cela donne un infini plus « grand » ?

En rajoutant les résultats de divisions, c'est-à-dire les nombres décimaux et plus généralement les nombres rationnels, on a la sensation d'obtenir énormément plus de nombres.

Mais obtient-on pour autant un infini « plus grand » ?

En rajoutant enfin les nombres « irrationnels », comme le mystérieux nombre *pi*, obtient-on cette fois un infini encore « plus grand » ?

On peut illustrer ces ensembles de nombres emboités par un schéma :

Nous allons tenter de mieux cerner la notion d'infini en tentant de répondre à ces questions…

UN VOCABULAIRE UTILE…

La bijection : deux collections d'objets sont en **bijection** si à chaque objet de la première collection on peut faire correspondre un et un seul objet de la seconde.

<u>Remarque :</u> *un ensemble de danseurs est en bijection avec un ensemble de danseuses si l'on peut former des couples sans laisser personne de côté.*

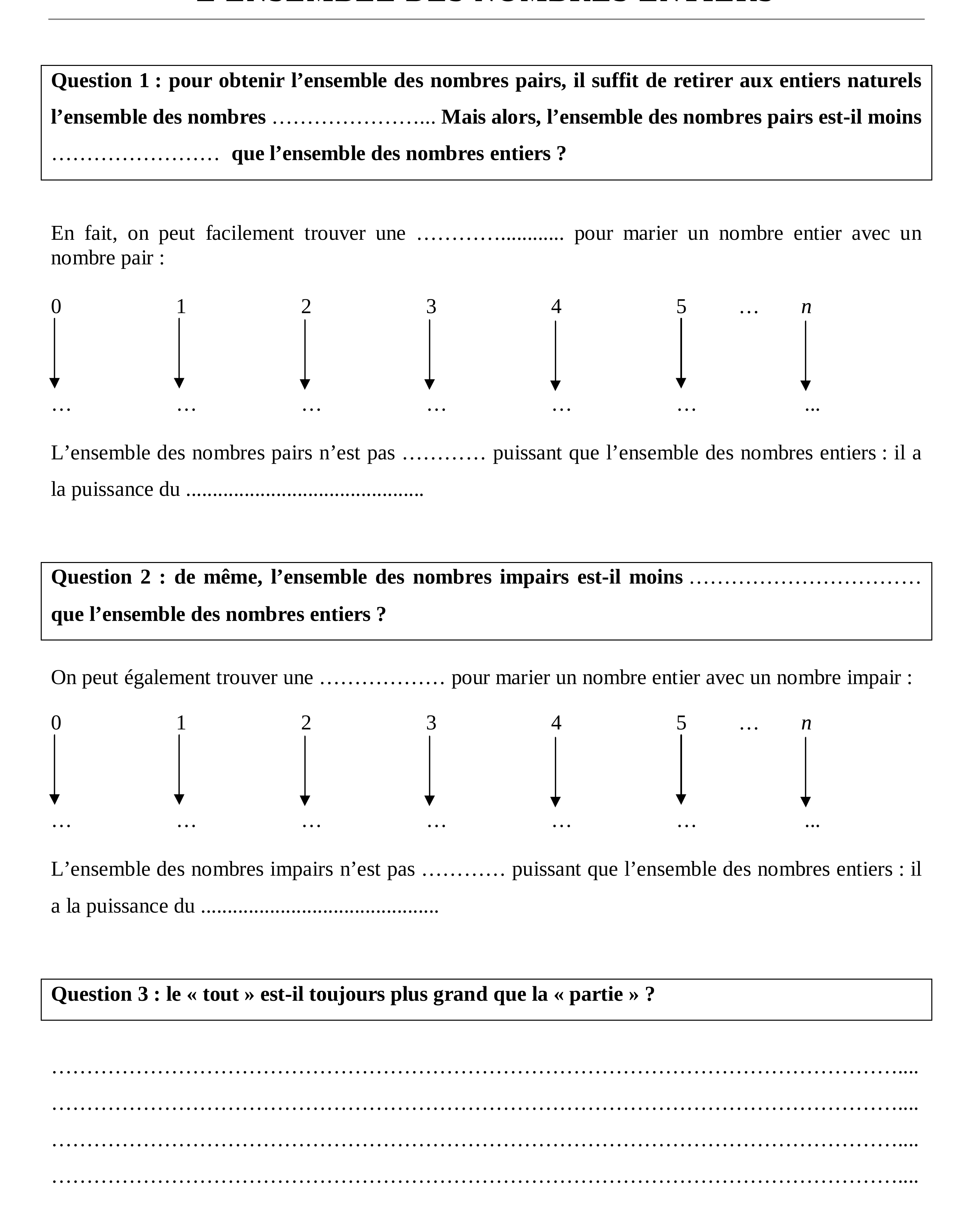


Deux ensembles en **bijection** ont le même « cardinal » :

- cela signifie qu'ils ont le ……………………………………… si ce sont des ensembles **finis** ;
- cela signifie qu'ils ont la même ……………………….. si ce sont des ensembles **infinis**, puisqu'il est difficile de parler de *nombre d'éléments* lorsque l'ensemble est infini.

Un ensemble qui peut être mis en bijection avec l'ensemble des nombres entiers naturels a la **puissance du** …………………………………...

Un ensemble infini est un ensemble qui peut être mis en bijection avec l'une de ses parties (le « tout » et le « rien » exclus).



L’ENSEMBLE DES NOMBRES ENTIERS

Question 1 : pour obtenir l’ensemble des nombres pairs, il suffit de retirer aux entiers naturels l’ensemble des nombres ………………….. Mais alors, l’ensemble des nombres pairs est-il moins …………………… que l’ensemble des nombres entiers ?

En fait, on peut facilement trouver une ………….......... pour marier un nombre entier avec un nombre pair :

0	1	2	3	4	5	…	*n*
↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓
…	…	…	…	…	…		...

L’ensemble des nombres pairs n’est pas ………… puissant que l’ensemble des nombres entiers : il a la puissance du ....

Question 2 : de même, l’ensemble des nombres impairs est-il moins …………………………… que l’ensemble des nombres entiers ?

On peut également trouver une ……………… pour marier un nombre entier avec un nombre impair :

0	1	2	3	4	5	…	*n*
↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓
…	…	…	…	…	…		...

L’ensemble des nombres impairs n’est pas ………… puissant que l’ensemble des nombres entiers : il a la puissance du ....

Question 3 : le « tout » est-il toujours plus grand que la « partie » ?

……………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………....

Question 4 : l'ensemble des nombres entiers relatifs est-il plus ………………………. que l'ensemble des nombres entiers naturels ?

0	**+1**	**+2**	**+3**	**+4**	**+5**	**6**	**…**
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**…**
	-1	**-2**	**-3**	**-4**	**-5**	**-6**	**…**

La bijection s'écrit :

Si *n* est pair, alors n ⟶ ……….

Si *n* est impair, alors n ⟶ ……….

L'ensemble des nombres relatifs n'est pas ………….. puissant que l'ensemble des nombres entiers : il a lui aussi la puissance du ………………………..



PUISSANCE DE L'ENSEMBLE DES RATIONNELS

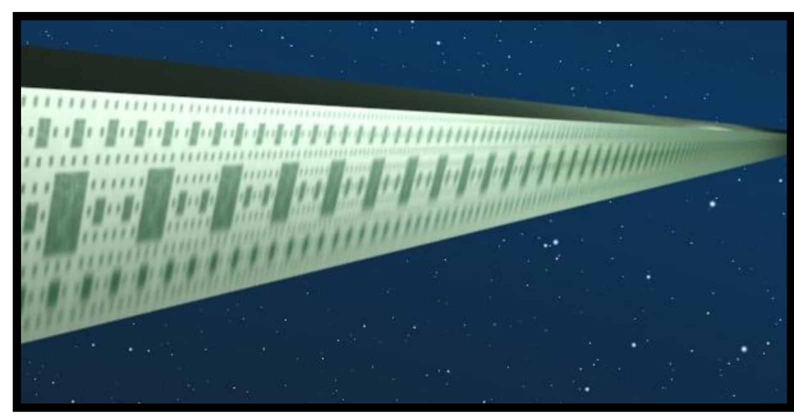
Question 5 : et maintenant, on rajoute les nombres rationnels, c'est-à-dire les résultats de divisions. Obtient-on un ensemble plus grand ? Pour le savoir, observons cette curieuse histoire appelée *le grand problème de l'hôtel Hilbert*… Une histoire à dormir debout…

PARTIE 1

La planète Cantor a la particularité d'être habitée par une infinité de personnes, logées dans une infinité d'hôtels. Chacun de ces hôtels dispose d'une infinité de chambres.



Un voyageur attardé arrive sur cette planète, pénètre dans un hôtel et demande une chambre pour la nuit au concierge à moitié endormi. La façade de ce palace est monumentale et ses ailes se perdent dans la brume.



Cet hôtel est remarquable sur un point : il n'y a pas de dernière chambre !!

Imaginer un couloir sans fin, une première chambre numérotée 1, une deuxième chambre numérotée 2, et ainsi de suite…une chambre numérotée 31415, suivie d'une autre chambre, et toujours la même perspective de chambres en enfilade. La chambre numérotée $n+1$ succède ainsi à la chambre n, quelle que soit la valeur de n. Tout se passe comme si l'hôtel Hilbert avait une infinité de chambres.
Notre voyageur s'adresse au concierge.

- *Je voudrais une chambre, s'il vous plaît.*
- *Nous sommes complets, dit le concierge, en se lissant la moustache d'un geste mécanique.*
- *Quoi ! Vous avez une infinité de chambres occupées ? Cela défie l'imagination.*
- *Eh oui, les affaires sont florissantes, répond l'homme aux clés d'or, avec un large sourire. Mais ne vous inquiétez pas, nous allons arranger cela. Mes pensionnaires sont très coopératifs. Avec leur collaboration, vous disposerez d'une chambre dans quelques minutes et vous pourrez dormir tout à loisir. Nous n'avons jamais dérogé à notre devise : « nos clients sont toujours infiniment satisfaits ».*
- *Permettez-moi de douter de votre raison, fait le voyageur en ricanant, il est impossible de dénouer une telle situation.*
- *Rien de plus simple au contraire, rétorque le concierge.*

Quelle est donc la solution du concierge ?

……………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………....

Et s'il arrivait brutalement 100 nouveaux voyageurs ?

……………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………....

PARTIE 2

Le voyageur saisit sa valise, s'apprête à la soulever quand une idée curieuse lui traverse l'esprit le figeant dans une posture légèrement ridicule. Après quelques secondes de réflexion, il se tourne vers le concierge et lui lance en s'esclaffant :

- *Dites-moi, si une infinité de voyageurs vous demande une chambre pour chacun d'entre-eux et que l'hôtel soit complet, vous seriez sans doute fort embarrassé : cette fois-ci, le problème est bien insoluble.*
- *Croyez-vous ? Le problème s'est déjà présenté.*
- *Vous avez une solution ? dit le voyageur avec admiration.*
- *Oui, je pense que vous êtes à même d'en faire autant.*

Quelle solution envisage-t-il donc ?

Si une infinité de voyageurs arrive à l’hôtel et demande une chambre, le concierge donne l’ordre

……………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………....

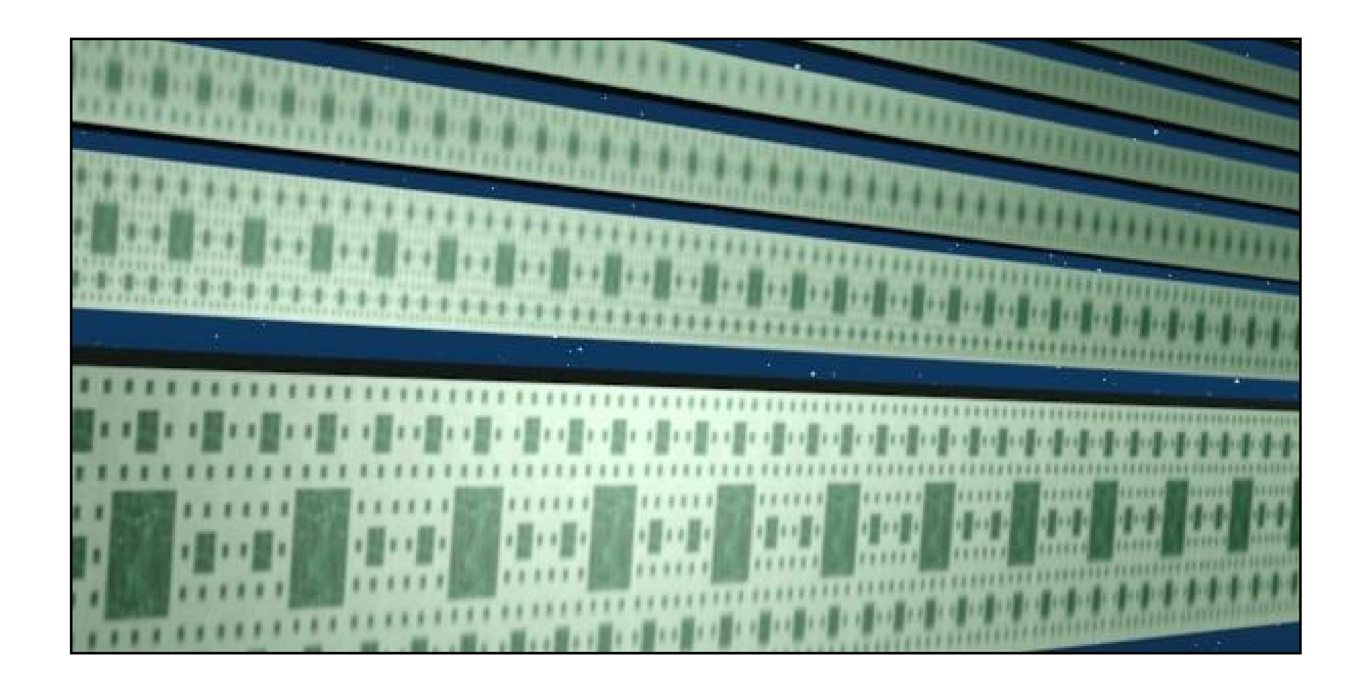
1	2	3	4	5	…	n
↓	↓	↓	↓	↓		↓
…	…	…	…	…		…

Ainsi il libère toutes les chambres à numéro …….…….. et n’occupe que les chambres à numéro ……….….…, et comme il y a une infinité de chambres à numéro …………….…., on peut donc recevoir une infinité de clients.

PARTIE 3

Le voyageur est complètement bluffé par la maitrise du concierge.

- *Allez, il est temps d’aller se coucher, fait le voyageur. Je ne pense pas qu’il y ait de problème d’attribution de chambres encore plus difficile.*
- *Détrompez-vous, poursuit le concierge. On m’a contacté récemment pour me soumettre un problème fort intéressant.*



- *Le groupe Cantor, qui contrôle tout, est propriétaire de notre chaine d'hôtels qui comporte, vous le savez, une infinité d'hôtels numérotés Cantor I, Cantor II, Cantor III, …, Cantor N, … chacun ayant une infinité de chambres. Un soir, un haut gradé de la direction m'appelle et me dit que par souci d'économie d'énergie, il souhaite fermer tous les hôtels, à l'exception du premier, et reloger tous les clients expulsés dans le Cantor I.*
- *Reloger une infinité d'infinités de personnes ? Est-ce possible ?*
- *Tout à fait, dit le concierge. il existe même une …infinité de solutions !*

Mais comment s'y prend-il ?

Le concierge appelle simultanément tous les clients de tous les hôtels et leur donne un mode d'emploi qui indique dans quelle chambre se rendre. **Lequel ?**

1	1	2	3	4	5	6 …
2	1	2	3	4	5	6 …
3	1	2	3	4	5	6 …
4	1	2	3	4	5	6 …
5	1	2	3	4	5	6 …
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Avec cette méthode, chaque client se voit attribuer une chambre dans l'hôtel restant. Il est donc possible de mettre en bijection une « infinité d'infinis » avec un seul « infini ».

Question 6 : quel est donc le rapport entre cette histoire et la manière de comparer l'ensemble des entiers avec l'ensemble des nombres rationnels ?

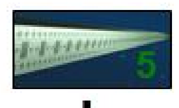
Il suffit tout simplement d'imaginer que les fractions de dénominateur 1 vivent dans l'hôtel …, celles de dénominateur 2 dans l'hôtel …, etc. **Donner alors le mode d'emploi qui indique comment écrire et numéroter l'ensemble des fractions :**











.
.
.

On possède maintenant une technique pour numéroter ces fractions, c'est-à-dire pour créer une bijection entre l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des rationnels !

L'ensemble des nombres rationnels a donc aussi la puissance du ……………………………. **!**

Bilan :

l'ensemble des nombres …….,
l'ensemble des nombres ………..,
l'ensemble des nombres entiers …………,
l'ensemble des nombres entiers ………….
et l'ensemble des nombres ………….
ont la même ……………….. **!!**

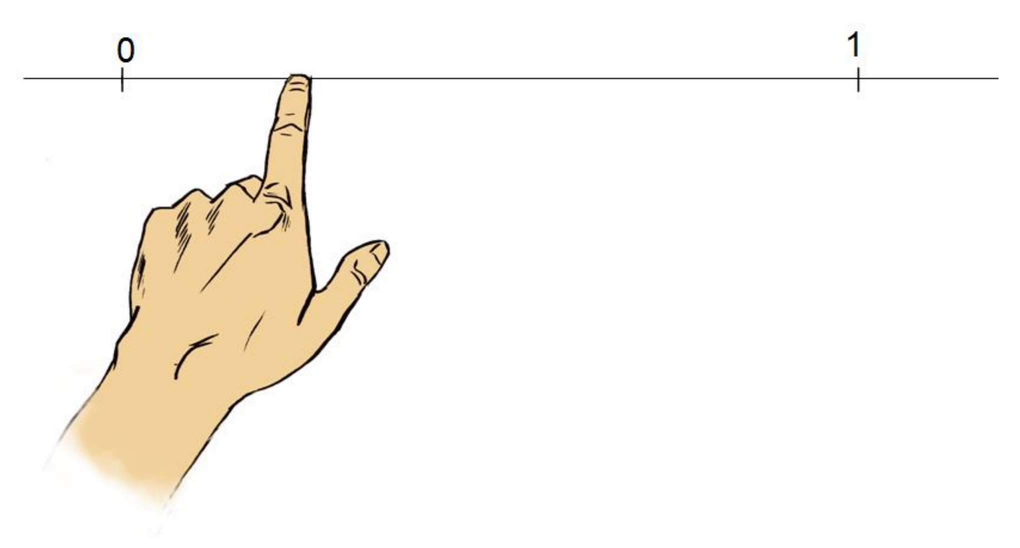
PUISSANCE DE L'ENSEMBLE DES REELS

Question 7 : il est maintenant temps de se demander si, en rajoutant les nombres irrationnels (les nombres qui ne sont pas résultats d'une division) comme *pi*, l'on obtient encore un ensemble qui a la puissance du dénombrable. Par exemple, l'ensemble de tous les nombres réels compris entre 0 et 1 est-il dénombrable ?

Le voyageur, perturbé par tant d'ingéniosité a passé une nuit plutôt agitée. Lorsqu'il descend pour prendre son petit-déjeuner le lendemain matin, il aperçoit cette affiche, collée au mur dans le grand hall :

Peut-on mettre l'ensemble des points d'un segment de longueur 1 en bijection avec l'ensemble des entiers ?

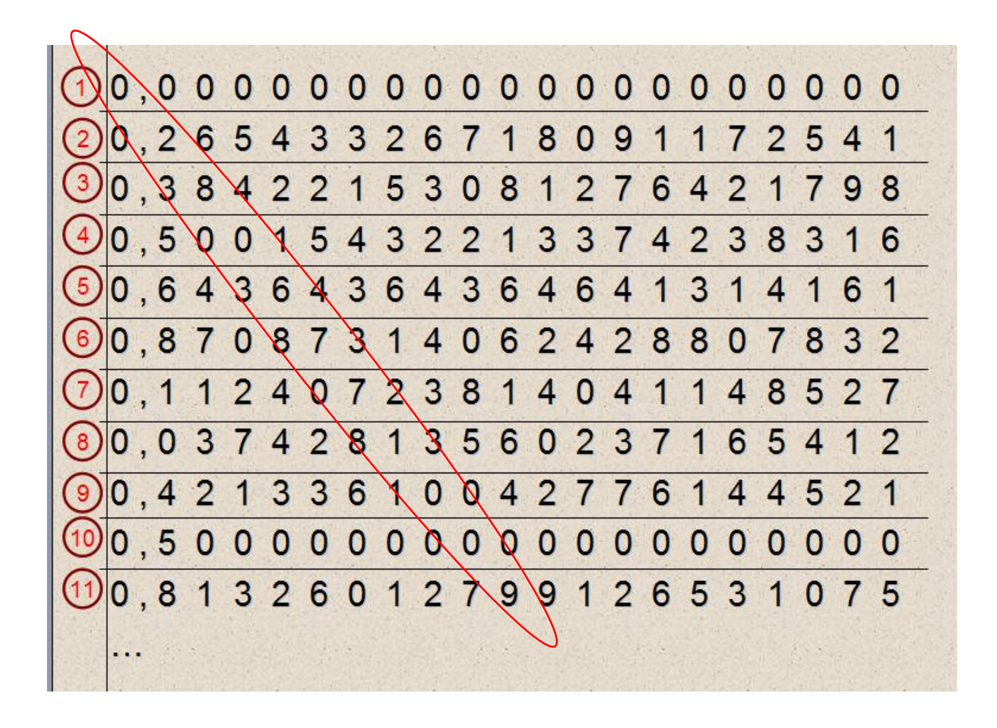
- *Avez-vous essayé, demande le voyageur au concierge ?*
- *Je n'ai pas cette vanité, lui répond-il. Mais j'ai un client, parti récemment, qui a essayé. Sur la planète Cantor, nous sommes immortels. Il a donc pris tout son temps pour essayer de numéroter chaque point du segment. Il me disait qu'il ne voyait pas pourquoi l'infinité du segment [0,1] serait telle que l'on ne pourrait pas la dénombrer en numérotant chacun de ses points. Il tenait des carnets où il notait tout. Il m'a donc montré son ouvrage : chaque ligne représente l'abscisse du point qu'il a repéré avec son doigt.*



Son carnet n'avait pas de fin sur la droite car la plupart des nombres sur lesquels il était tombé avaient un développement décimal illimité. Et il n'y avait pas non plus de fin vers le bas car le nombre de points comptés, donc de lignes du carnet était un infini dénombrable. Mais attendez, je vais vous montrer !

Le concierge se rend alors dans la remise et rapporte le fameux carnet.

- *Il vous l'a laissé ??*
- *Oui, car je lui ai prouvé, alors qu'il pensait les avoir tous faits, qu'il en avait oublié ! Il est parti sans un mot ! Mais regardez plutôt… Il a posé son doigt au hasard sur le segment et obtenu ceci :*



1	0 , 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
2	0 , 2 6 5 4 3 3 2 6 7 1 8 0 9 1 1 7 2 5 4 1
3	0 , 3 8 4 2 2 1 5 3 0 8 1 2 7 6 4 2 1 7 9 8
4	0 , 5 0 0 1 5 4 3 2 2 1 3 3 7 4 2 3 8 3 1 6
5	0 , 6 4 3 6 4 3 6 4 3 6 4 6 4 1 3 1 4 1 6 1
6	0 , 8 7 0 8 7 3 1 4 0 6 2 4 2 8 8 0 7 8 3 2
7	0 , 1 1 2 4 0 7 2 3 8 1 4 0 4 1 1 4 8 5 2 7
8	0 , 0 3 7 4 2 8 1 3 5 6 0 2 3 7 1 6 5 4 1 2
9	0 , 4 2 1 3 3 6 1 0 0 4 2 7 7 6 1 4 4 5 2 1
10	0 , 5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
11	0 , 8 1 3 2 6 0 1 2 7 9 9 1 2 6 5 3 1 0 7 5
	…

Le voyageur perplexe, se plonge dans une longue réflexion.

- *Mais comment avez-vous fait ??*
- *Eh bien, j'ai tout simplement écrit l'abscisse d'un point qui ne figure pas sur ce carnet de route. Pour cela, j'ai entouré les chiffres de la diagonale :*

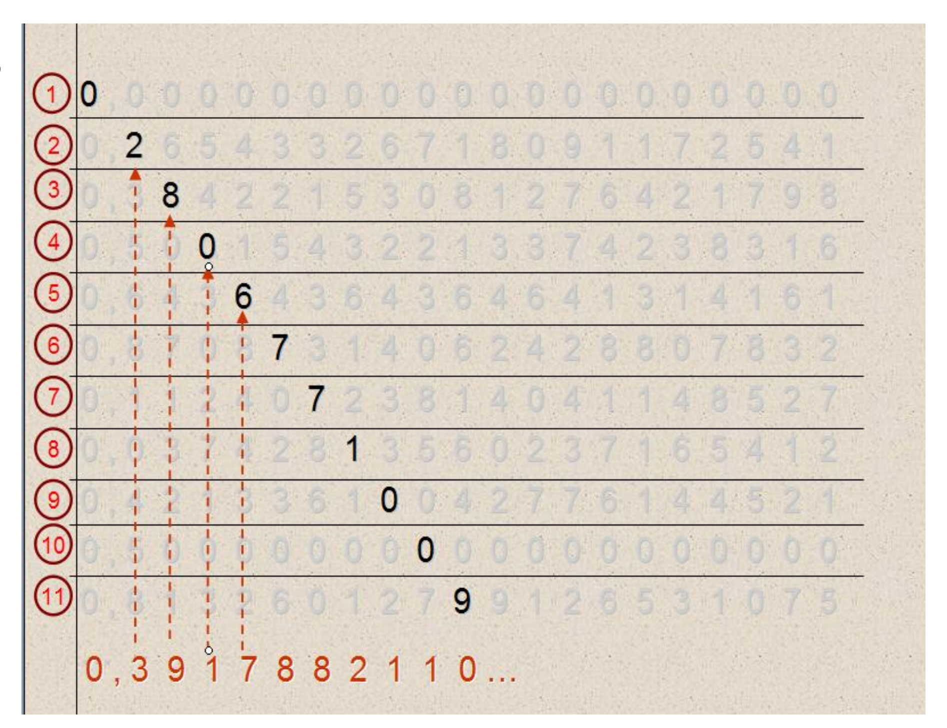
2 8 0 6 7 7 1 0 0 9 ….

et *j'ai ajouté « 1 » à chacun de ces chiffres (et pour le 9, je le remplace par 0). Cela donne :*

3 9 1 7 8 8 2 1 1 0 ….

Le nombre dont les chiffres du développement décimal sont ceux-là, n'est pas sur le carnet de route ! Il s'est alors mis à feuilleter son carnet avec fébrilité. Mais c'était peine perdue… vous voyez pourquoi ?

Et pourquoi donc alors ?

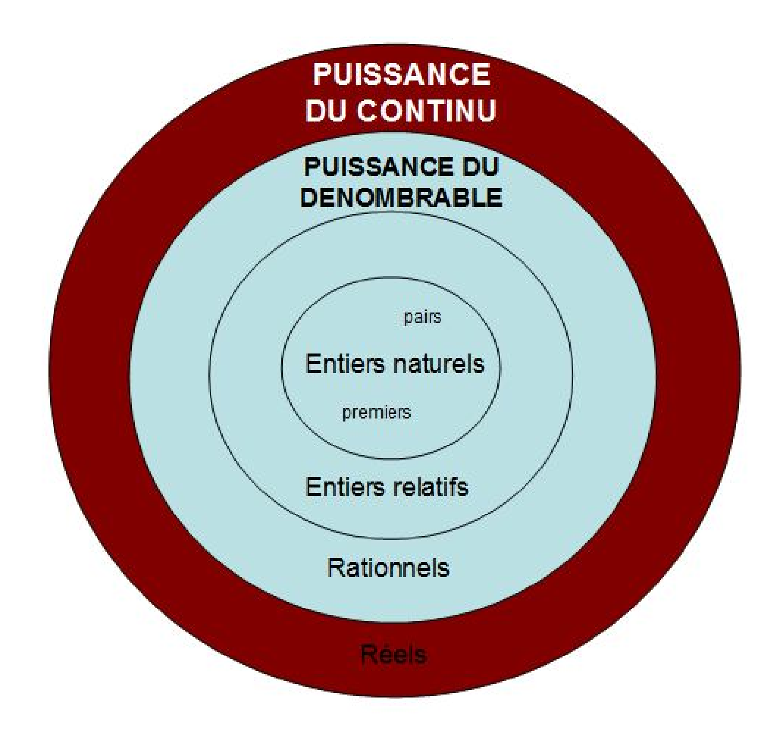


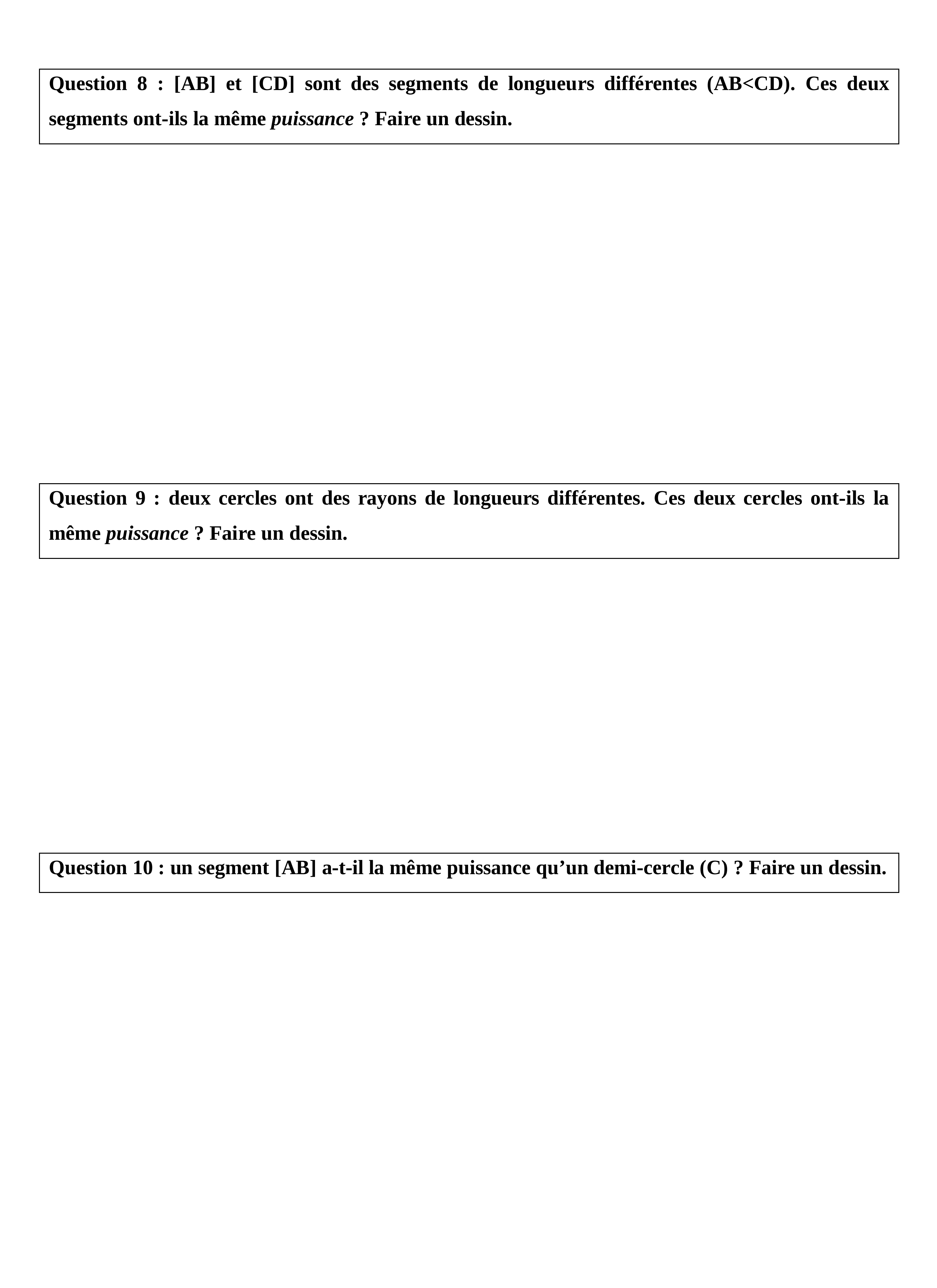
On peut dire que le nombre 0,3917882110…n'est pas sur le carnet car :

- il n'est pas sur la ligne 2, car …………………………………………………………………...
- il n'est pas sur la ligne 3, car …………………………………………………………………...
- il n'est pas sur la ligne 4, car …………………………………………………………………...

C'est pourquoi on peut affirmer que le chiffre 0,3917882110…ne peut être dans …………. ligne de ce carnet. Et il est bien sûr possible de commencer la diagonale à partir ……………………………….

L'ensemble des nombres réels au complet est donc d'une puissance supérieure à la puissance du ………………………… ! On appelle cette puissance, la puissance du ……………………...





Question 8 : [AB] et [CD] sont des segments de longueurs différentes (AB<CD). Ces deux segments ont-ils la même *puissance* ? Faire un dessin.

Question 9 : deux cercles ont des rayons de longueurs différentes. Ces deux cercles ont-ils la même *puissance* ? Faire un dessin.

Question 10 : un segment [AB] a-t-il la même puissance qu'un demi-cercle (C) ? Faire un dessin.

Question 11 : un demi-cercle (C) privé de ses extrémités a-t-il la même puissance qu'une droite ?

Question 12 : un segment a-t-il la même puissance qu'une droite ? Faire un dessin.

Question 13 : comment inventer un autre procédé géométrique qui permette de montrer que l'ensemble des points d'un segment a la même puissance que l'ensemble des points d'une demi-droite ?

Question 14 : peut-on mettre en bijection une ligne et une surface ? Peut-on mettre en bijection l'ensemble des points intérieurs d'un carré de côté 1 avec l'un de ses côtés ?

On se place dans un repère. Les points intérieurs du carré possèdent deux coordonnées variables. Les points du segment rouge ont la particularité d'avoir tous la même ordonnée : 0.

Comment construire une bijection entre ces deux ensembles de points ?

Une première idée pourrait être de faire correspondre au point (0,23 ; 0,76) le point (0,23 ; 0)… Mais quel problème va-t-on rencontrer ?

…………………………………………………………………...

…………………………………………………………………...

…………………………………………………………………...

…………………………………………………………………...

…………………………………………………………………...

1

(0,23 ; 0,76)

0

(0,23 ; 0)

1

Quel principe faut-il donc utiliser pour faire correspondre un point du carré à un unique point du segment ?

…………………………………………………………………...

…………………………………………………………………...

…………………………………………………………………...

…………………………………………………………………...

…………………………………………………………………...

1

(0,23 ; 0,76)

0

1

Décrire le procédé inverse :

…………………………………………………………………...

…………………………………………………………………...

…………………………………………………………………...

…………………………………………………………………...

…………………………………………………………………...

1

0

(0, 6514 ; 0)

1

L'ensemble des points intérieurs d'un carré n'a « que » la puissance du ……………………….. !

Pour résumé, un segment a la même puissance qu'une ………………………….…
Un segment a la même puissance qu'un ……………………….
Il ne faut alors pas beaucoup d'imagination pour penser qu'un segment a la même puissance qu'un ……….… et que ce même petit segment a la même puissance que l'ensemble des points de ……….. tout entier…
On peut de la même manière mettre en bijection l'ensemble des instants contenus dans une heure, avec l'ensemble instants de l'éternité…
Tout cela est vraiment très bizarre…

En résolvant ces questions, Cantor proposa de nommer les cardinaux des différents infinis en utilisant la première lettre de l'alphabet hébreu : **aleph**. Ainsi, $\aleph_0$ sera le cardinal du dénombrable et $\aleph_1$, le cardinal du continu.

Mais n'y-a-t-il que deux types d'infinis ?
Y-a-t-il des ensembles dont le cardinal est supérieur à la puissance du continu ?
On trouve la réponse dans une nouvelle question : comment, en partant d'un ensemble, construire un ensemble plus puissant ?

Question 15 : A est un ensemble à 3 éléments. Quel est le cardinal de l'ensemble des parties de A ? (L'ensemble « vide » est considéré comme une partie de A)

Si l'on prend l'exemple d'une troupe de 3 danseuses, l'ensemble des parties de cette troupe est l'ensemble de toutes les « combinaisons » de spectacles que l'on peut faire avec ces trois danseuses : la première seule, les trois ensembles, aucune, la première et la troisième, etc.
Pour un ensemble à trois éléments, le cardinal de l'ensemble des parties est …….

Schéma avec trois danseuses A, B, C :

Comme un ensemble à …… éléments est plus puissant qu'un ensemble à 3 éléments, il n'y a pas de …………………… possible entre les deux. On a peut montrer (voir annexe) que cette technique peut s'étendre aux ensembles infinis pour construire un ensemble plus puissant qu'un ensemble donné.

Question 16 : intuitivement, comment trouver un ensemble dont la puissance est supérieure à la puissance du continu, puis encore plus grand, encore plus grand ?

Pour trouver aleph 2, il faut prendre les ………………. de l'ensemble d'aleph 1.
Pour trouver aleph 3, il faut prendre les ………………. de l'ensemble d'aleph 2, ...
Laissez-vous embarquez vers … l'infini des infinis !!!

Question 17 : existe-t-il un ensemble plus puissant que le dénombrable et moins puissant que le continu ?

Maintenant, de deux choses l'une : soit un infini s'intercale entre le « ………………………… » et le « ………………………... » (c'est l'hypothèse du continu), soit il n'y a rien. C'est là qu'intervient un mathématicien de génie : Kurt ……………..

En 1938, il démontre qu'ajouter « l'hypothèse du continu est vraie » à la théorie mathématique ne conduit pas à une ………………………..

En 1963, le mathématicien Paul Cohen démontre qu'ajouter « l'hypothèse du continu est fausse » à la théorie mathématique ne conduit pas à une ……………………….

L'hypothèse du continu devient alors une proposition indécidable.

A vous de choisir… selon votre intime …………………………..

Si vous avez survécu, …bravo !

Cantor, lui, est devenu fou !!!

